M1 ACC - Théorie de l'information
Contrôle continu, 03/11/2025

Durée 2h

Aucun document ou appareil électronique autorisé

Exercice 1 (Raisonnement élémentaire)**.**

1. *Montrer que* $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$.
2. *Montrer que la composée de deux applications injectives est injective.*

Exercice 2 (Questions de cours)**.** *Soit* $\mathcal{P} = (\Omega, p)$ *un espace probabilisé fini. Soient* X, Y *deux variables aléatoires sur* $\mathcal{P}$ *à valeurs dans un ensemble fini* S*. Soit* $C\colon S \to \{0,1\}^\star$ *un code binaire sur* S*.*

1. *Définir l'entropie du couple* $H(X,Y)$*, et l'entropie conditionnelle* $H(Y|X)$*.*
2. *Énoncer et démontrer la formule qui lie* $H(X,Y)$ *et* $H(Y|X)$*.*
3. *Définir le codage* $C^\star$ *associé à* C*.*
4. *Définir la longueur moyenne de* C *relativement à* X *et la comparer à l'entropie de* X*.*
5. *Existe-t-il un code binaire* C *uniquement décodable sur* $\{1, 2, \ldots, 10\}$ *tel que* $\ell(C(i)) = 3$ *pour* $i = 1, \ldots, 6$ *et* $\ell(C(i)) = 4$ *pour* $i = 7, \ldots, 10$ *?*

Exercice 3 (Codes de Huffman et Shannon-Fano)**.** *Soit* X *une variable aléatoire à valeurs dans* $A = \{a, b, c, d, e\}$ *de loi* p_X *définie par le tableau suivant.*

x	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*
$p_X(x)$	*1/9*	*1/9*	*1/9*	*1/3*	*1/3*

1. *Calculer l'entropie* $H(X)$ *de* X *; donner le résultat sous la forme* $a + b\log_2(3)$ *avec* $a, b \in \mathbb{Q}$*.*
2. *Existe-t-il un code sur* A *dont la longueur moyenne relativement à* X *est* $H(X)$ *?*
3. *Construire un code de Huffman* C *associé à* X*.*
4. *Construire un code de Shannon-Fano* SF *associé à* X*.*
5. *Est-ce que* SF *est optimal ?*

Exercice 4 (Codes suffixes)**.** *On dit qu'un mot* $x \in \{0,1\}^\star$ *est un suffixe d'un mot* $y \in \{0,1\}^\star$ *s'il existe* $z \in \{0,1\}^\star$ *tel que* $y = z\|x$*. Soit* A *un alphabet. On dit qu'un code binaire* C *sur* A *est suffixe si pour tous* $a \neq b \in A$*, le mot* $C(a)$ *n'est pas un suffixe de* $C(b)$*.*

1. *Dans cette question uniquement,* $A = \{a, b, c\}$*. Donner un exemple de code préfixe sur* A *qui n'est pas suffixe, et un exemple d'un code suffixe sur* A *qui n'est pas préfixe.*
2. *Montrer qu'un code régulier de longueur fixe sur* A *est à la fois préfixe et suffixe.*
3. *Pour tout alphabet* B*, on définit l'application :*
$$w_B\colon \begin{cases} B^\star & \longrightarrow & B^\star \\ a_0 \cdots a_n & \longmapsto & a_n \cdots a_0 \end{cases}$$
Que vaut $w_B \circ w_B$ *? Montrer que pour tous* $b_1, \ldots, b_r \in B^\star, w(b_1\| \cdots \|b_r) = w_B(b_r)\| \cdots \|w_B(b_1)$*.*
4. *Soit* C *un code binaire sur* A*. Montrer que* C *est préfixe si et seulement si* $w_{\{0,1\}} \circ C$ *est suffixe.*
5. *Montrer que pour tout code binaire* C *sur* A*,* $C^\star = w_{\{0,1\}} \circ (w_{\{0,1\}} \circ C)^\star \circ w_A$*.*
6. *En déduire que tout code suffixe sur* A *est uniquement décodable.*
7. *Soit* X *une variable aléatoire à valeurs dans* A*. Existe-t-il un code suffixe optimal pour* X *?*