

Théorie de l'information - TD1

Fonctionnement : Vous aurez deux exercices à rendre sous forme *manuscrite* toutes les deux séances. Ils seront corrigés en TD. En cas d'absence, vous pouvez envoyer un scan des exercices par mail à l'adresse christophe.levrat@math.cnrs.fr. Vous pouvez également rendre si vous le souhaitez les exercices marqués d'une étoile (★) ; ils servent à aller plus loin et ne seront pas corrigés en TD.

Exercices à rendre pour le 06/10 : 5 et 6.

Exercice 1 (Pièces et dés). *Modéliser les expériences suivantes par une variable aléatoire réelle sur un espace probabilisé fini. Calculer l'entropie de cette variable aléatoire.*

1. La valeur d'un dé à 6 faces équilibré.
2. La somme de 2 dés à 4 faces équilibrés.
3. Le nombre de "pile" obtenus en lançant 2 pièces équilibrées.

Exercice 2 (Somme de dés). *On lance simultanément deux dés D_1, D_2 à 6 faces. On définit les deux variables aléatoires suivantes à valeurs dans $\{0, 1\}$: $X_1 = 1$ si et seulement si $D_1 \geq 4$, et $X_2 = 1$ si et seulement si $D_1 + D_2 \geq 5$.*

1. Donner la loi jointe de (X_1, X_2) .
2. Calculer $H(X_1), H(X_2), H(X_1, X_2)$.
3. Calculer les entropies conditionnelles $H(X_2|X_1)$ et $H(X_1|X_2)$.

Exercice 3 (Fonction d'entropie). *Soit $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(0) = 0$ et, pour tout $t \in]0, 1]$, $f(t) = -t \log_2(t)$.*

1. Montrer que f est continue.
2. Montrer que f est strictement concave sur $[0, 1]$, qu'elle y admet un unique maximum et déterminer celui-ci.
3. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\{1, \dots, n\}$. Dédurre de la question précédente que $H(X) \leq \log(n)$.
4. À quoi correspond le cas d'égalité dans l'inégalité précédente ?

Exercice 4 (Non-création d'information). *Soient X, Y deux variables aléatoires à valeurs dans un ensemble A définies sur un même espace probabilisé discret (Ω, p) . Soit $f: A \rightarrow B$ une application. Soit $Z: \Omega \rightarrow B$ une variable aléatoire.*

1. Montrer que $H(f(X)|X) = 0$: c'est le principe de non-création d'information.
2. En déduire que $H(f(X)) \leq H(X)$.
3. Si $H(Z|X) = 0$, montrer qu'il existe une application $g: A \rightarrow B$ telle que Z et $g(X)$ ont même loi.
4. Si X, Y sont à valeurs dans $\mathbb{R}$, montrer que $H(X + Y), H(XY), H(e^{X^2 Y^3}) \leq H(X) + H(Y)$.

Exercice 5 (Divergence). *Soient p, q des distributions de probabilité sur un même ensemble fini S . On définit leur divergence de Kullback-Leibler par*

$$D_{\text{KL}}(p||q) = \sum_{\substack{x \in S \\ p(x) > 0}} p(x) \log_2 \left(\frac{p(x)}{q(x)} \right) \in [0, \infty]$$

où l'on pose, pour tout $x > 0$, $x \log_2(x/0) = \infty$.

1. Donner un exemple montrant qu'en général, $D_{\text{KL}}(p||q)$ et $D_{\text{KL}}(q||p)$ ne sont pas égales.
2. En utilisant l'inégalité $\ln(x) \leq x - 1$ valable pour tout $x > 0$, montrer que $D_{\text{KL}}(p||q) \geq 0$.
3. Montrer que $D_{\text{KL}}(p||q) = 0$ si et seulement si $p = q$.
4. Est-ce que D_{KL} définit une distance sur l'ensemble des distributions de probabilité sur S ?

Exercice 6 (Loi géométrique). Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ suivant la loi géométrique de paramètre $p \in [0, 1]$. Cette loi vérifie pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\mathbb{P}(X = n) = p^n(1 - p)$. (Attention à cette convention ! Il y a au moins 4 définitions possibles de l'expression "loi géométrique".)

1. Rappeler quel type de situation est modélisé par la loi géométrique.
2. Calculer l'espérance de X .
3. Calculer l'entropie de X .
4. Soit Y une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ d'espérance $\mathbb{E}(X)$. Exprimer $H(X) - H(Y)$ en fonction de la divergence de Kullback-Leibler des lois de X et Y , et en déduire que $H(Y) \leq H(X)$.

Exercice 7 (★ Une distance entre variables aléatoires). Soit (Ω, p) un espace probabilisé discret. Soit A un ensemble de cardinal n . Étant donné deux variables aléatoires $X, Y : \Omega \rightarrow A$, on définit leur distance par $d(X, Y) = 2 - (H(X) + H(Y))/H(X, Y)$. On dira que les distributions de X et Y sont équivalentes si la matrice de leurs probabilités jointes $(p(X = x, Y = y))_{(x, y) \in A \times A}$ contient au plus un terme non nul par ligne et par colonne.

1. Montrer que cette équivalence de distributions définit bien une relation d'équivalence. En quoi cette notion d'équivalence est-elle raisonnable ?
2. Montrer que d est symétrique et vérifie l'inégalité triangulaire.
3. Montrer que si X et Y ont des distributions équivalentes alors $d(X, Y) = 0$.
4. Montrer que si $d(X, Y) = 0$ alors X et Y ont des distributions équivalentes.

On a montré ici que l'ensemble des variables aléatoires sur Ω à valeurs dans A modulo la relation d'équivalence des distributions est un espace métrique ; l'application d est appelée distance de Rajski, en l'honneur du mathématicien polonais qui l'a introduite en 1961.

Exercice 8 (★ Tirage dans un polygone régulier). Soit P_n un polygone régulier à n sommets. Soit D_n le groupe des isométries de P_n . On rappelle que c'est un groupe à $2n$ éléments engendré par une rotation r_n d'ordre n et une réflexion s_n d'ordre 2, vérifiant de plus $s_n r_n s_n^{-1} = r_n^{-1}$. On considère une variable aléatoire S qui tire au hasard un sommet de P_n selon une distribution uniforme, et une variable aléatoire P qui tire au hasard un élément de D_n . On note $Z = P(S)$.

1. Calculer les entropies $H(S)$ et $H(P)$.
2. Dans le cas où P suit une loi uniforme, calculer $H(Z)$.
3. Montrer que quelle que soit la loi de P , $H(Z) \geq H(S)$.
4. On suppose que P_n est le polygone dans $\mathbb{C}$ de sommets $e^{2ik\pi/n}$ pour $k = 0, \dots, n - 1$. On note X l'abscisse de S , et Y l'ordonnée de S . Déterminer les lois de X et Y .
5. Calculer $H(X)$, $H(X|Y)$ et $H(Y|X)$.