

Théorie de l'information – TD2 – Corrigé

Exercice 2 (Écriture binaire). 1. Le code binaire C sur $\{0, 1, \dots, 9\}$ qui à un entier associe son écriture en base 2 est-il régulier ? préfixe ? Uniquement décodable ?

Solution Ce code est régulier, car les écritures binaires des entiers de 0 à 9 sont deux à deux distinctes. Il n'est pas préfixe, ni uniquement décodable. En effet, $C(3) = 11 = C(1) || C(1) = C^*(11)$.

2. Le code binaire D sur $\mathbb{N}$ qui à un entier associe son écriture en base 2 est-il régulier ? préfixe ? uniquement décodable ?

Solution Le code D est régulier, car il est la bijection inverse de l'application $b_2: \{0, 1\}^* \rightarrow \mathbb{N}$ qui pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ associe au mot $a_0 \dots a_n \in \{0, 1\}^n$ l'entier $a_0 + 2a_1 + \dots + 2^n a_n$. Il n'est ni préfixe, ni uniquement décodable pour la même raison que C .

3. Le codage B sur $\{0, 1, \dots, 9\}^*$ qui à l'écriture d'un entier en base 10 associe l'écriture de ce même entier en base 2 est-il uniquement décodable ?

Solution Le codage B est uniquement décodable, car il est la composée de deux bijections : la bijection $b_{10}: \{0, 1, \dots, 9\}^* \rightarrow \mathbb{N}$ qui pour tout entier naturel n associe au mot $a_0 \dots a_n$ l'entier $a_0 + 10a_1 + \dots + 10^n a_n$, et l'inverse de la bijection b_2 définie à la question précédente.

Exercice 7 (Code de Gray). Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\{0, 1, 2, 3\}$ de loi p_X telle que $p_X(0) = 1/6$, $p_X(1) = 1/3$, $p_X(2) = p_X(3) = 1/4$. On considère le code de Gray $G: 0 \mapsto 00$, $1 \mapsto 01$, $2 \mapsto 11$, $3 \mapsto 10$. Sa particularité est que les mots de code associés à deux entiers successifs diffèrent seulement d'un bit.

1. Calculer l'entropie de X .

Solution

$$\begin{aligned} H(X) &= -\frac{1}{6} \log_2 \left(\frac{1}{6} \right) - \frac{1}{3} \log_2 \left(\frac{1}{3} \right) - 2 \cdot \frac{1}{4} \log_2 \left(\frac{1}{4} \right) \\ &= \frac{\log_2(6)}{6} + \frac{\log_2(3)}{3} + \frac{\log_2(4)}{2} \\ &= \frac{7}{6} + \frac{1}{2} \log_2(3) \\ &\simeq 1.96. \end{aligned}$$

2. Coder le message 301223 à l'aide de G .

Solution $G^*(301223) = 100001111110$.

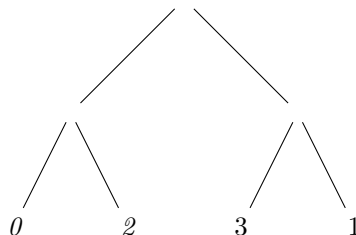
3. Calculer la longueur moyenne et l'efficacité de G relativement à X .

Solution La longueur moyenne $\ell_X(G)$ de G vaut 2 car G est de longueur fixe 2. L'efficacité de G relativement à X est

$$\begin{aligned} \text{Eff}_X(G) &= \frac{H(X)}{\ell_X(G)} \\ &= \frac{7}{12} + \frac{1}{4} \log_2(3) \\ &\simeq 0.98. \end{aligned}$$

4. Construire le code de Huffman associé à la source X . Calculer sa longueur moyenne et son efficacité relativement à X .

Solution L'algorithme vu en cours produit l'arbre suivant:



Le code de Huffman associé à X est donc $0 \mapsto 00, 1 \mapsto 11, 2 \mapsto 01, 3 \mapsto 10$. Il est de longueur fixe 2, donc de longueur moyenne 2. Son efficacité relativement à X est la même que celle de G .

5. Conclure.

Solution Cela signifie que le code G est optimal.

Exercice 8 (Codes de longueurs données). Pour quelles valeurs de $n \geq 4$ existe-t-il un code binaire C uniquement décodable sur $\{1 \dots n\}$ dont les longueurs des mots de code vérifient : $\ell(C(1)) = \ell(C(2)) = 2$, $\ell(C(3)) = 3$, et $\ell(C(i)) = 5$ pour tout $i \in \{4 \dots n\}$?

Solution D'après l'inégalité de Kraft-McMillan, s'il existe un tel code alors

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{n-3}{2^5} \leq 1$$

c'est-à-dire

$$\frac{5}{8} + \frac{n-3}{32} \leq 1.$$

Ceci équivaut à $n-3 \leq \frac{32-5}{8}$, i.e. $n \leq 15$. Pour tout $n \in \{4 \dots 15\}$, comme l'inégalité

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{n-3}{2^5} \leq 1$$

est vérifiée, les longueurs données sont celles d'un code de Shannon-Fano. Les valeurs cherchées sont donc $4, 5, \dots, 15$.