

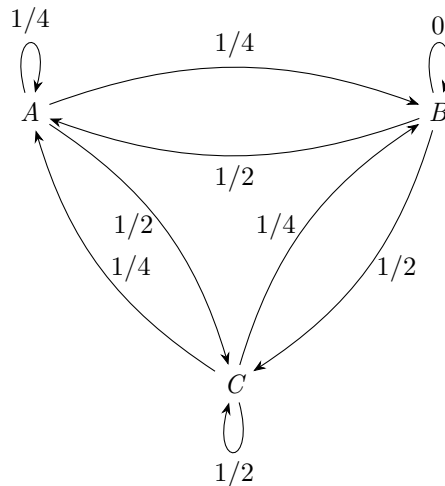
# Théorie de l'information – TD3 – Corrigé

**Exercice 2** (Une chaîne de Markov). Une université compte trois bâtiments :  $A$ ,  $B$  et  $C$ . Une personne est déposée au hasard dans l'un des trois bâtiments selon une loi de probabilité donnée. La personne se déplace ensuite aléatoirement sur le campus en suivant les règles suivantes.

- Quand elle est dans le bâtiment  $A$ , elle va dans le bâtiment  $B$  avec probabilité  $1/4$ , dans le bâtiment  $C$  avec probabilité  $1/2$ , ou dans une autre aile du bâtiment  $A$  avec probabilité  $1/4$ .
- Quand elle est dans le bâtiment  $B$ , elle va dans le bâtiment  $A$  avec probabilité  $1/2$ , ou dans le bâtiment  $C$  avec probabilité  $1/2$ .
- Quand elle est dans le bâtiment  $C$ , elle va dans le bâtiment  $A$  avec probabilité  $1/4$ , dans le bâtiment  $B$  avec probabilité  $1/4$ , ou dans une autre aile du bâtiment  $C$  avec probabilité  $1/2$ .

1. Modéliser la situation par une chaîne de Markov  $X = (X_n)_{n \geq 0}$  dont on donnera le graphe de transition.

**Solution** Définissons une chaîne de Markov  $X = (X_n)_{n \geq 0}$  à valeurs dans  $\{A, B, C\}$ , telle que  $X_0$  donne le bâtiment de départ de la personne, et de graphe de transition :



Alors la variable  $X_n$  donne la loi de probabilité du bâtiment dans lequel se trouve la personne après  $n$  déplacements.

2. Donner la matrice de transition de cette chaîne.

**Solution** La matrice de transition de cette chaîne est la suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 0 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

3. Montrer que cette chaîne admet une unique loi invariante et la calculer.

**Solution : méthode 1** On observe que la matrice

$$M^2 = \begin{pmatrix} 5/16 & 1/4 & 5/16 \\ 3/16 & 1/4 & 3/16 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

n'a que des coefficients strictement positifs. Par conséquent, la chaîne de Markov homogène  $X$  est primitive, et admet donc une unique loi invariante. Celle-ci est donnée par un vecteur propre stochastique  $P$  de  $M$  associé à la valeur propre 1. En résolvant le système  $P = MP$ , on trouve

$$P = \begin{pmatrix} 3/10 \\ 2/10 \\ 5/10 \end{pmatrix}.$$

**Solution : méthode 2** On calcule l'espace propre à droite de  $M$  associé à la valeur propre 1. Il est de dimension 1, engendré par le vecteur

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

dont tous les coefficients sont positifs. Par conséquent,  $X$  admet une unique loi invariante, qui est donnée par le vecteur

$$\begin{pmatrix} 3/10 \\ 1/5 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

4. Si  $X_0$  suit cette loi invariante, calculer le taux d'entropie de  $X$ .

**Solution** Comme  $X$  est une chaîne de Markov homogène, le taux d'entropie de  $X$  est  $\bar{H}(X) = H(X_1|X_0)$ . En notant  $P$  le vecteur de la loi invariante, il vaut

$$\bar{H}(X) = \sum_{i=1}^3 p_i \sum_{j=1}^3 m_{ij} \log_2(m_{ij}) \tag{1}$$

$$= \frac{3}{10} \left[ 2 \cdot \frac{1}{4} \log_2 \left( \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{2} \log_2 \left( \frac{1}{2} \right) \right] + \frac{1}{5} \left[ 2 \cdot \frac{1}{2} \log_2 \left( \frac{1}{2} \right) \right] + \frac{1}{2} \left[ 3 \cdot \frac{1}{2} \log_2 \left( \frac{1}{2} \right) \right] \tag{2}$$

$$= \frac{7}{5}. \tag{3}$$

**Exercice 5** (Codage des sources vérifiant l'AEP). Soit  $X = (X_n)_{n \geq 0}$  un processus stochastique discret à valeurs dans un ensemble  $S$ . Soit  $\varepsilon > 0$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on note :

- $U_n$  un code régulier sur  $A^n$  de longueur fixe minimale ;
- $V_{n,\varepsilon}$  un code régulier sur  $T_\varepsilon^{(n)}(X)$  de longueur fixe minimale ;
- $D_{n,\varepsilon} : A^n \rightarrow \{0,1\}^*$  le code sur  $A^n$  défini par :

$$D_{n,\varepsilon}(a_1 \dots a_n) = \begin{cases} 0 \| U_n(x) & \text{si } x \notin T_\varepsilon^{(n)}(X) \\ 1 \| V_{n,\varepsilon}(x) & \text{si } x \in T_\varepsilon^{(n)}(X). \end{cases}$$

1. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Quelles sont les longueurs moyennes de  $U_n$  et  $V_{n,\varepsilon}$  ?

**Solution** La longueur moyenne de  $U_n$  est  $\lceil \log_2 |A^n| \rceil = \lceil n \log_2 |A| \rceil$ . La longueur moyenne de  $V_{n,\varepsilon}$  est  $\lceil \log_2 |T_\varepsilon^{(n)}(X)| \rceil$ .

2. Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

(a) Montrer que  $D_{n,\varepsilon}$  est un code régulier sur  $A^n$ .

**Solution** Soient  $x, y \in A^n$  tels que  $D_n(x) = D_n(y)$ . Alors le premier bit de  $D_n(x)$  et de  $D_n(y)$  est le même. Par conséquent, soit  $x \in T_\varepsilon^{(n)}(X)$  et  $y \in T_\varepsilon^{(n)}(X)$ , soit  $x \notin T_\varepsilon^{(n)}(X)$  et  $y \notin T_\varepsilon^{(n)}(X)$ . Dans le premier cas,  $D_n(x) = 1\|V_n(x)$  et  $D_n(y) = 1\|V_n(y)$  : comme  $V_n$  est régulier,  $x = y$ . Dans le second cas,  $D_n(x) = 0\|U_n(x)$  et  $D_n(y) = 0\|U_n(y)$  : comme  $U_n$  est régulier,  $x = y$ . Par conséquent,  $D_n$  est régulier.

(b) Exprimer sa longueur moyenne relativement à  $X_{<n} := (X_0, \dots, X_{n-1})$  en fonction de  $p(T_\varepsilon^{(n)}(X))$  et  $|T_\varepsilon^{(n)}(X)|$ .

**Solution**

$$\begin{aligned} \ell_{X_{<n}}(D_n) &= \sum_{x \in A^n} p(X_{<n} = x) \ell(D_n(x)) \\ &= \sum_{x \in T_\varepsilon^{(n)}(X)} p(X_{<n} = x) \ell(1\|V_n(x)) + \sum_{x \notin T_\varepsilon^{(n)}(X)} p(X_{<n} = x) \ell(0\|U_n(x)) \\ &= p(T_\varepsilon^{(n)}(X))(1 + \lceil \log_2 |T_\varepsilon^{(n)}(X)| \rceil) + (1 - p(T_\varepsilon^{(n)}(X)))(1 + \lceil n \log_2 |A| \rceil). \end{aligned}$$

3. On suppose désormais que  $X$  vérifie l'AEP et que  $\varepsilon < \bar{H}(X)$ . Montrer qu'il existe  $\delta > 0$  tel que pour  $n$  assez grand,

$$\frac{\ell_{X_{<n}}(D_{n,\delta})}{n} \leq \bar{H}(X) + \varepsilon.$$

**Solution** Posons  $\delta = \varepsilon/2$ . On sait que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\bar{H}(X) - \delta + \frac{1}{n} \log_2(p(T_\varepsilon^{(n)}(X))) \leq \frac{1}{n} \log_2 |T_\varepsilon^{(n)}(X)| \leq \bar{H}(X) + \delta.$$

Or comme  $X$  vérifie l'AEP,  $\lim_{n \rightarrow \infty} p(T_\varepsilon^{(n)}(X)) = 1$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - p(T_\varepsilon^{(n)}(X))) = 0$ . Par conséquent,

$$\frac{1}{n} \log_2 p(T_\varepsilon^{(n)}(X)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

et

$$\frac{1}{n} p(T_\varepsilon^{(n)}(X))(1 + \lceil \log_2 |T_\varepsilon^{(n)}(X)| \rceil) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \bar{H}(X) + \delta.$$

D'autre part,

$$\frac{1}{n} (1 - p(T_\varepsilon^{(n)}(X)))(1 + \lceil n \log_2 |A| \rceil) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} (1 - p(T_\varepsilon^{(n)}(X))) \log_2 |A| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

La réponse à la question précédente permet de conclure.

4. On suppose toujours que  $X$  vérifie l'AEP. On définit un codage  $C_\delta: A^* \rightarrow \{0, 1\}^*$  de la façon suivante. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Notons  $l_n = \lceil \log_2(n) \rceil$ . Écrivons  $n = \sum_{i=0}^{l_n} \alpha_i 2^i$ . Alors

$$C_\varepsilon(x) = 0^{l_n} \|\alpha_{l_n} \cdots \alpha_0\| D_{n,\varepsilon}(x)$$

où  $0^{l_n}$  est le mot de longueur  $l_n$  dont toutes les lettres sont 0.

(a) Montrer que  $C_\varepsilon$  est uniquement décodable.

**Solution** Soient  $x, y \in A^*$  tels que  $C_\varepsilon(x) = C_\varepsilon(y)$ . Notons  $z = C_\varepsilon(x)$ . Notons  $n = \ell(x)$  et  $m = \ell(y)$ . Le mot  $z$  commence par  $l_n$  symboles 0 suivis d'un 1 ; il en est de même avec  $C_\varepsilon(y)$  et  $l_m$ . Par conséquent,  $\lfloor \log_2(n) \rfloor = \lfloor \log_2(m) \rfloor$ . Les bits numéro  $l_n + 1, \dots, 2l_n + 1$  de  $z$  sont l'écriture binaire à la fois de  $n$  et de  $m$  : cela signifie que  $n = m$ . La régularité de  $D_{n,\varepsilon}$  permet de conclure que  $x = y$ .

(b) Montrer qu'il existe  $\delta > 0$  tel que pour  $n$  assez grand,

$$\frac{1}{n} \sum_{x \in A^n} p(X_{<n} = x) \ell(C_\delta(x)) \leq \bar{H}(X) + \varepsilon.$$

**Solution** Posons  $\delta = \varepsilon/2$ .

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{x \in A^n} p(X_{<n} = x) \ell(C_\delta(x)) &= \frac{1}{n} \sum_{x \in A^n} p(X_{<n} = x) [(2\lfloor \log_2(n) \rfloor + 1) + \ell(D_{n,\delta}(x))] \\ &= \frac{2\lfloor \log_2(n) \rfloor + 1}{n} + \frac{\ell_{X_{<n}}(D_{n,\delta}(x))}{n} \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \bar{H}(X) + \delta. \end{aligned}$$

Par conséquent, comme  $\delta < \varepsilon$ , il existe  $N$  tel que pour tout  $n \geq N$ ,

$$\frac{1}{n} \sum_{x \in A^n} p(X_{<n} = x) \ell(C_\delta(x)) \leq \bar{H}(X) + \varepsilon.$$