

Théorie de l'information - TD4

Exercices à rendre pour le 15/12 : 4 et 5.

Exercice 1 (Information mutuelle). *Dans chacune des situations suivantes, calculer l'information mutuelle entre les variables aléatoires X et Y .*

1. *On lance une pièce équilibrée : $X = 1$ si pile, 0 si face ; $Y = 1$ si face, 0 si pile.*
2. *On lance un dé équilibré à 6 faces : $X =$ la valeur de la face du dessus, $Y =$ la valeur de la face du dessous.*
3. *On lance un dé équilibré à 6 faces : $X =$ la valeur de la face du dessus, $Y =$ la valeur de la face de droite.*

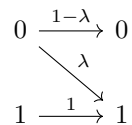
Exercice 2 (Information mutuelle et non-crédation d'information). *Soit X une variable aléatoire à valeurs dans un alphabet A . Soit Y une variable aléatoire à valeurs dans un alphabet B . Soient $f: A \rightarrow C$, $g: B \rightarrow D$ deux applications.*

1. *Montrer que $I(X; f(X)) = H(f(X))$.*
2. *Montrer que $H(X|g(Y)) \geq H(X|Y)$.*
3. *Montrer que $I(X; Y) \geq I(f(X); g(Y))$.*

Exercice 3 (Canal binaire à effacement). *On considère le canal binaire à effacement C de probabilité d'effacement λ . Soit X la variable d'entrée et Y une variable de sortie associée. Notons $\alpha = p(X = 0)$.*

1. *Calculer $H(Y|X)$.*
2. *Exprimer $H(Y)$ en fonction de α et λ .*
3. *En déduire la capacité de C .*

Exercice 4 (Canal en Z). *On considère le canal binaire en Z de paramètre λ , défini par le diagramme suivant.*



Notons X la variable d'entrée et Y une variable de sortie associée à X . On note $h: t \mapsto -t \log_2(t) - (1-t) \log_2(1-t)$ la fonction d'entropie binaire.

1. *Donner la matrice de transmission du canal.*
2. *Calculer $H(Y|X)$.*
3. *Calculer $H(Y)$ et $I(X; Y)$.*
4. *Calculer la capacité du canal.*

Exercice 5 (Concaténation de canaux). On considère deux canaux $C_1 = (A, S, \Pi_1)$ et $C_2 = (S, B, \Pi_2)$. Soit C le canal obtenu en concaténant les deux : la sortie de C_1 est l'entrée de C_2 .

1. Donner la matrice de transmission de C .
2. Si C_1, C_2 sont des canaux binaires symétriques de paramètres λ_1, λ_2 , est-ce que C est encore un canal binaire symétrique ? Et si on concaténait n canaux binaires symétriques ?
3. Montrer que $\text{Cap}(C) \leq \min(\text{Cap}(C_1), \text{Cap}(C_2))$.

Exercice 6 (★ Somme et produit de canaux). On considère deux canaux $C_i = (A_i, B_i, \Pi_i)$, $i = 1, 2$.

1. Soit $C_{\Pi} = (A_1 \times A_2, B_1 \times B_2, p')$ où la loi de transition p' est définie par $p'((b_1, b_2)|(a_1, a_2)) = p_1(b_1|a_1)p_2(b_2|a_2)$. Décrire la matrice de transmission et calculer le capacité de C_{Π} .
2. Soit $C_{\sqcup} = (A_1 \sqcup A_2, B_1 \sqcup B_2, p'')$ où la loi de transmission p'' est définie par $p''(b|a) = p_i(b|a)$ si $a \in A_i, b \in B_i$, et $p''(b|a) = 0$ si $a \in A_i, b \in B_{1-i}$. Décrire la matrice de transmission de C_{\sqcup} et montrer que sa capacité de vérifie : $2^{\text{Cap}C_{\sqcup}} = 2^{\text{Cap}C_1} + 2^{\text{Cap}C_2}$.