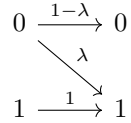


Théorie de l'information – TD4 – Corrigé

Exercice 4 (Canal en Z). On considère le canal binaire en Z de paramètre λ , défini par le diagramme suivant.



Notons X la variable d'entrée et Y une variable de sortie associée à X . On note $h: t \mapsto -t \log_2(t) - (1-t) \log_2(1-t)$ la fonction d'entropie binaire.

1. Donner la matrice de transmission du canal.

Solution La matrice de transmission de ce canal est :

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}$$

2. Calculer $H(Y|X)$.

Solution Notons $\alpha = p(X=0)$. Alors

$$\begin{aligned}
 H(Y|X) &= \alpha H(Y|X=0) + (1-\alpha) H(Y|X=1) \\
 &= \alpha h(\lambda).
 \end{aligned}$$

3. Calculer $H(Y)$ et $I(X;Y)$.

Solution La loi de Y est donnée par $p(Y=0) = (1-\lambda)\alpha$ et $p(Y=1) = \alpha\lambda + (1-\alpha)$. Par conséquent,

$$H(Y) = h((1-\lambda)\alpha)$$

et

$$I(X;Y) = h((1-\lambda)\alpha) - \alpha h(\lambda).$$

4. Calculer la capacité du canal.

Solution Définissons $f_\lambda:]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ par la formule $f_\lambda(\alpha) = h((1-\lambda)\alpha) - \alpha h(\lambda)$. On cherche à exprimer $\sup_{0 \leq \alpha \leq 1} f_\lambda(\alpha)$ en fonction de λ .

Remarquons que $\lim_0 f_\lambda = \lim_1 f_\lambda = 0$, et que sur $[\frac{1}{2(1-\lambda)}, 1[$, la fonction f_λ est décroissante car somme de deux fonctions décroissantes. Un calcul rapide montre que pour tout $x \in]0, 1[$,

$$h'(x) = \log_2 \left(\frac{1-x}{x} \right).$$

Par conséquent, pour tout $\alpha \in]0, 1[$,

$$\begin{aligned}
 f'_\lambda(\alpha) &= (1-\lambda) \log_2 \left(\frac{1-(1-\lambda)\alpha}{(1-\lambda)\alpha} \right) - h(\lambda) \\
 &= (1-\lambda) \log_2 \left(\frac{1-(1-\lambda)\alpha}{(1-\lambda)\alpha} \right) + (1-\lambda) \log_2(1-\lambda) + \lambda \log_2(\lambda) \\
 &= (1-\lambda) \log_2 \left(\frac{1-(1-\lambda)\alpha}{\alpha} \right) + \lambda \log_2(\lambda)
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} f'_\lambda(\alpha) = 0 &\iff \log_2 \left(\frac{1 - (1 - \lambda)\alpha}{\alpha} \right) = \frac{\lambda}{\lambda - 1} \log_2(\lambda) \\ &\iff \frac{1 - (1 - \lambda)\alpha}{\alpha} = 2^{\lambda \log_2(\lambda) / (\lambda - 1)} \\ &\iff \alpha = \frac{1}{1 - \lambda + \lambda^{\lambda / (\lambda - 1)}}. \end{aligned}$$

Notons $\alpha_0(\lambda)$ cette valeur. La fonction f_λ est donc croissante sur $]0, \alpha_0(\lambda)]$ et décroissante sur $[\alpha_0(\lambda), 1[$. Par conséquent, la capacité du canal en Z de paramètre λ vaut

$$f_\lambda(\alpha_0(\lambda)) = h((1 - \lambda)\alpha_0(\lambda)) - \alpha_0(\lambda)h(\lambda).$$

Exercice 5 (Concaténation de canaux). On considère deux canaux $C_1 = (A, S, \Pi_1)$ et $C_2 = (S, B, \Pi_2)$. Soit C le canal obtenu en concaténant les deux : la sortie de C_1 est l'entrée de C_2 .

1. Donner la matrice de transmission de C .

Solution Notons X une variable aléatoire à valeurs dans A , Y la variable de sortie pour C_1 associée à X , et Z la variable de sortie pour C_2 associée à la variable d'entrée Y . Un point essentiel à remarquer pour l'ensemble de l'exercice est que (X, Y, Z) est une chaîne de Markov : pour tout $(x, s, z) \in A \times S \times B$,

$$p(Z = z | X = x, Y = s) = p(Z = z | Y = s).$$

Pour tout $(x, z) \in A \times B$,

$$\begin{aligned} p(Z = z | X = x) &= \sum_{s \in S} p(Z = z, Y = s | X = x) && \text{(formule des probabilités totales)} \\ &= \sum_{s \in S} p(Z = z | X = x, Y = s) p(Y = s | X = x) \\ &= \sum_{s \in S} p(Z = z | Y = s) p(Y = s | X = x) \\ &= \sum_{s \in S} [\Pi_1]_{x,s} [\Pi_2]_{s,z}. \end{aligned}$$

Ceci étant le terme en position (x, z) de la matrice de transmission Π de C , on vient de prouver que $\Pi = \Pi_1 \Pi_2$.

2. Si C_1, C_2 sont des canaux binaires symétriques de paramètres λ_1, λ_2 , est-ce que C est encore un canal binaire symétrique ? Et si on concaténait n canaux binaires symétriques ?

Solution La matrice de transmission de C est alors la matrice :

$$\begin{aligned} \Pi &= \begin{pmatrix} 1 - \lambda_1 & \lambda_1 \\ \lambda_1 & 1 - \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - \lambda_2 & \lambda_2 \\ \lambda_2 & 1 - \lambda_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (1 - \lambda_1)(1 - \lambda_2) + \lambda_1 \lambda_2 & \lambda_2(1 - \lambda_1) + \lambda_1(1 - \lambda_2) \\ \lambda_2(1 - \lambda_1) + \lambda_1(1 - \lambda_2) & (1 - \lambda_1)(1 - \lambda_2) + \lambda_1 \lambda_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Cette matrice est celle du canal binaire symétrique de paramètre $(1 - \lambda_1)(1 - \lambda_2) + \lambda_1\lambda_2$. Par conséquent, C est un canal binaire symétrique.

Montrons par récurrence sur $n \geq 1$ que si C_1, \dots, C_n sont des canaux binaires symétriques, alors le canal $C^{(n)}$ obtenu en les concaténant est encore un canal binaire symétrique. Supposons que l'affirmation soit vraie pour la concaténation de $n - 1$ canaux. Le canal $C^{(n)}$ obtenu en concaténant C_1, \dots, C_n est la concaténation de $C^{(n-1)}$ avec C_n . Par hypothèse de récurrence, $C^{(n-1)}$ est un canal binaire symétrique. Comme la concaténation de deux canaux binaires symétriques est un canal binaire symétrique, $C^{(n)}$ en est encore un.

3. Montrer que $\text{Cap}(C) \leq \min(\text{Cap}(C_1), \text{Cap}(C_2))$.

Solution Il suffit de montrer que pour tout triplet de variables (X, Y, Z) formant une chaîne de Markov,

$$I(X; Z) \leq \min(I(X; Y), I(Y; Z)).$$

C'est un résultat appelé **inégalité du traitement de données**. Démontrons d'abord que $I(X; Z) \leq I(Y; Z)$.

$$\begin{aligned} I(X; Z) - I(Y; Z) &= H(X) + H(Z) - H(X, Z) - (H(Y) + H(Z) - H(Y, Z)) \\ &= H(X) - H(Y) - H(X, Z) + H(Y, Z) \\ &= H(Z|Y) - H(Z|X) \\ &= H(Z|X, Y) - H(Z|X) && ((X, Y, Z) \text{ est une chaîne de Markov}) \\ &\leq 0. && (\text{conditionner réduit l'entropie}) \end{aligned}$$

Comme (Z, Y, X) est encore une chaîne de Markov, l'inégalité $I(X; Z) \leq I(Y; Z)$ se démontre exactement de la même façon.