M1 ACC - Théorie de l'information
Contrôle continu, 18/11/2024

Durée 1h30
Aucun document ou appareil électronique autorisé

Exercice 1 (Questions de cours)**.** *Soit $\mathcal{P} = (\Omega, p)$ un espace probabilisé fini. Soient X, Y deux variables aléatoires sur $\mathcal{P}$ à valeurs dans un ensemble fini S. Soit $C\colon S \to \{0,1\}^\star$ un code binaire sur S.*

1. *Définir l'entropie $H(X)$ de X, et l'entropie conditionnelle $H(X|Y)$ de X sachant Y.*
2. *Définir l'information mutuelle $I(X;Y)$ entre X et Y.*
3. *Énoncer et démontrer la relation qui lie $I(X;Y)$, $H(X)$ et $H(X|Y)$.*
4. *Définir la longueur moyenne et l'efficacité de C relativement à X.*
5. *Qu'affirme le théorème de Shannon au sujet de cette efficacité ?*

Exercice 2 (Codes préfixes et uniquement décodables)**.**

1. *Les codes suivants sur $\{1\dots 4\}$ sont-ils réguliers ? préfixes ? uniquement décodables ?*
   - *(a)* $(0, 01, 001, 0001)$
   - *(b)* $(0, 10, 110, 1110)$
   - *(c)* $(1, 01, 1, 00)$
2. *Donner, en le justifiant, un exemple de code uniquement décodable et non préfixe sur l'ensemble $\{1\dots 5\}$.*
3. *Soient n, p deux entiers naturels. On cherche à dénombrer les codes binaires C sur $\{1\dots n\}$ tels que pour tout $i \in \{1\dots n\}$, la longueur de $C(i)$ appartienne à $\{1\dots p\}$.*
   - *(a) Combien y a-t-il de codes ?*
   - *(b) Combien y a-t-il de tels codes réguliers ?*
   - *(c) ($\star$) Combien y a-t-il de tels codes réguliers C vérifiant que $C(1)$ n'est un préfixe d'aucun autre mot de code ?*

Exercice 3 (Codes de longueurs données)**.** *Pour quelles valeurs de $n \geqslant 4$ existe-t-il un code binaire C uniquement décodable sur $\{1\dots n\}$ dont les longueurs des mots de code vérifient :*
$\ell(C(1)) = \ell(C(2)) = 2$, $\ell(C(3)) = 3$, et $\ell(C(i)) = 5$ pour tout $i \in \{4\dots n\}$?

Exercice 4 (Codes de Huffman et Shannon-Fano)**.** *Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\{a, b, c, d, e\}$ de loi p_X définie par le tableau suivant.*

i	a	b	c	d	e
$p_X(i)$	1/6	1/3	1/8	1/8	1/4

1. *Construire un code de Huffman C associé à X.*
2. *Construire un code de Shannon-Fano C' associé à X.*
3. *Sans faire de calcul, donner des inégalités (strictes quand c'est possible) entre les longueurs moyennes $\ell_X(C)$, $\ell_X(C')$ et l'entropie $H(X)$.*
4. *Calculer les efficacités de C et C' relativement à X. Est-ce que C' est optimal ?*