Théorie de l'information - TD1

Fonctionnement : Vous aurez deux exercices à rendre sous forme *manuscrite* à chaque séance. Ils seront corrigés en TD. En cas d'absence, vous pouvez envoyer un scan des exercices par mail à l'adresse christophe.levrat@math.cnrs.fr.

Exercice 1 (Pièces et dés)**.** *Modéliser les expériences suivantes par une variable aléatoire sur un espace probabilisé fini. Calculer l'entropie de cette variable aléatoire.*

1. *La valeur d'un dé à 6 faces.*
2. *La somme de 3 dés à 6 faces.*
3. *Le nombre de "pile" obtenus en lançant 5 pièces.*

Exercice 2 (Information mutuelle)**.** *Dans chacune des situations suivantes, calculer l'information mutuelle entre les variables aléatoires X et Y.*

1. *On lance une pièce : $X = 1$ si pile, 0 si face ; $Y = 1$ si face, 0 si pile.*
2. *On lance un dé à 6 faces : $X =$ la valeur de la face du dessus, $Y =$ la valeur de la face du dessous.*
3. *On lance un dé à 6 faces : $X =$ la valeur de la face du dessus, $Y =$ la valeur de la face de droite.*

Exercice 3 (Somme de dés)**.** *On lance simultanément deux dés D_1, D_2 à 6 faces. On définit les deux variables aléatoires suivantes à valeurs dans $\{0,1\}$: $X_1 = 1$ si et seulement si $D_1 \geqslant 4$, et $X_2 = 1$ si et seulement si $D_1 + D_2 \geqslant 5$.*

1. *Donner la loi jointe de X_1, X_2.*
2. *Calculer $H(X_1), H(X_2), H(X_1, X_2)$.*
3. *Calculer l'information mutuelle $I(X_1; X_2)$.*

Exercice 4 (Fonction d'entropie - à rendre pour le 30/09)**.** *Soit $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(0) = 0$ et $f(t) = -t\log_2(t)$ pour tout $t \in]0,1]$.*

1. *Montrer que f est continue.*
2. *Montrer que f est strictement concave sur $[0,1]$, qu'elle y admet un unique maximum et déterminer celui-ci.*
3. *Soit X une variable aléatoire sur $\{1,\dots,n\}$. Déduire de la question précédente que $H(X) \leqslant \log(n)$.*
4. *À quoi correspond le cas d'égalité dans l'inégalité précédente ?*

Exercice 5 (Non-création d'information - à rendre pour le 30/09)**.** *Soient X, Y deux variables aléatoires à valeurs dans un ensemble A définies sur un même espace probabilisé discret Ω. Soit $f\colon A \to B$ une application. Soit $Z\colon \Omega \to B$ une variable aléatoire.*

1. *Montrer que $H(f(X)|X) = 0$: c'est le principe de non-création d'information.*
2. *En déduire que $H(f(X)) \leqslant H(X)$.*
3. *Si $H(Z|X) = 0$, montrer qu'il existe une application $g\colon A \to B$ telle que Z et $g(X)$ ont même loi.*
4. *Si X, Y sont à valeurs dans $\mathbb{R}$, montrer que $H(X+Y), H(XY), H(e^{X^2Y^3}) \leqslant H(X) + H(Y)$.*
5. *Montrer que $I(X; f(X)) = H(f(X))$.*

Exercice 6 (Loi géométrique - à rendre pour le 07/10). *Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ suivant la loi géométrique de paramètre $p \in [0,1]$. On rappelle que cette loi est définie par : $\mathbb{P}(X=n) = p^n(1-p)$.*

1. *Rappeler quel type de situation est modélisé par la loi géométrique.*
2. *Calculer l'espérance de X.*
3. *Calculer l'entropie de X.*
4. *Soit Y une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ d'espérance $\mathbb{E}(X)$. Exprimer $H(X) - H(Y)$ en fonction de la divergence de Kullback-Leibler des lois de X et Y, et en déduire que $H(Y) \leqslant H(X)$.*

Exercice 7 (Fonction de divergence - à rendre pour le 07/10). *Soit $f\colon]0,1]\times]0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $(x,y) \mapsto x\log(x/y)$.*

1. *Montrer que pour tout $y > 0$, $f(x,y) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$.*
2. *Montrer que pour tout $x > 0$, $f(x,y) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} +\infty$.*
3. *Montrer que f n'est pas continue en $(0,0)$.*
4. *Montrer que f n'admet pas de maximum ou minimum à l'intérieur de son domaine de définition.*
5. *Montrer que f admet un minimum sur son domaine de définition, mais pas de maximum.*

Exercice 8 (Une distance entre variables aléatoires). *Soit (Ω, p) un espace probabilisé discret. Soit A un ensemble de cardinal n. Étant donné deux variables aléatoires $X, Y\colon \Omega \to A$, on définit leur distance par $d(x,y) = 1 - I(X,Y)/H(X,Y)$. On dira que les distributions de X et Y sont équivalentes si la matrice de leurs probabilités jointes $(p(X=x, Y=y))_{(x,y)\in A\times A}$ contient au plus un terme non nul par ligne et par colonne.*

1. *Montrer que d est symétrique et vérifie l'inégalité triangulaire.*
2. *Montrer que si X et Y ont des distributions équivalentes alors $d(X,Y) = 0$.*
3. *Montrer que si $d(X,Y) = 0$ alors X et Y ont des distributions équivalentes.*

On a montré ici que l'ensemble des variables aléatoires sur Ω à valeurs dans A modulo la relation d'équivalence des distributions est un espace métrique ; l'application d est appelée distance de Rajski, en l'honneur du mathématicien polonais qui l'a introduite en 1961.

Exercice 9 ($\star$ Tirage dans un polygone régulier). *Soit P_n un polygone régulier à n sommets. Soit D_n le groupe des isométries de P_n. On rappelle que c'est un groupe à $2n$ éléments engendré par une rotation r_n d'ordre n et une réflexion s_n d'ordre 2, vérifiant de plus $s_n r_n s_n^{-1} = r_n^{-1}$. On considère une variable aléatoire S qui tire au hasard un sommet de P_n selon une distribution uniforme, et une variable aléatoire P qui tire au hasard un élément de D_n. On note $Z = P(S)$.*

1. *Calculer les entropies $H(S)$ et $H(P)$.*
2. *Dans le cas où P suit une loi uniforme, calculer $H(Z)$.*
3. *Montrer que quelle que soit la loi de P, $H(Z) \geqslant H(S)$.*
4. *On suppose que P_n est le polygone dans $\mathbb{C}$ de sommets $e^{2ik\pi/n}$ pour $k = 0, \ldots, n-1$. On note X l'abscisse de S, et Y l'ordonnée de S. Déterminer les lois de X et Y.*
5. *Calculer $H(X)$, $H(X|Y)$ et $I(X;Y)$.*