Théorie de l'information - TD3

Exrcices à rendre pour le 25/11: Exercice 2 (obligatoire) et 3 (facultatif).

Exercice 1. *Soit* $(X_n)_{n\geqslant 0}$ *une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi. Parmi les processus suivants, lesquels sont sans mémoire ? Markoviens ? Stationnaires ?*

1. $Y_n = \sum_{i=0}^{n} X_i^2$.
2. $Z_n = \max_{0\leqslant i\leqslant n}(X_i + X_n)$.
3. $T_n = X_n - X_{n-1}$ *pour* $n \geqslant 1$.

Exercice 2. *Un enseignant s'est perdu dans l'université et tourne en rond.*

- *Quand il est dans le bâtiment A, il va dans le bâtiment B avec probabilité 1/4, dans le bâtiment C avec probabilité 1/2, ou dans une autre aile du bâtiment A avec probabilité 1/4.*
- *Quand il est dans le bâtiment B, il va dans le bâtiment A avec probabilité 1/2, ou dans le bâtiment C avec probabilité 1/2.*
- *Quand il est dans le bâtiment C, il va dans le bâtiment A avec probabilité 1/4, dans le bâtiment B avec probabilité 1/4, ou dans une autre aile du bâtiment C avec probabilité 1/2.*

1. *Décrire une chaîne de Markov* $X = (X_n)_{n\geqslant 0}$ *qui représente le bâtiment dans lequel se trouve l'enseignant au bout de* n *déplacements et donner son graphe de transition.*
2. *Donner la matrice de transition de cette chaîne.*
3. *Montrer que cette chaîne admet une unique loi invariante et la calculer.*
4. *Si* X_0 *suit cette loi invariante, calculer le taux d'entropie de* X.

Exercice 3. *On considère une suite de variables de Bernoulli indépendantes* $X = (X_n)_{n\geqslant 0}$ *de même loi valant 1 avec probabilité* $1/4$ *et* 0 *avec probabilité* $3/4$.

1. *Le processus* X *est-il sans mémoire ? Markovien ? Stationnaire ?*
2. *Donner l'entropie de* X_0 *et le taux d'entropie de* X.
3. *Donner une séquence* 0.5*-typique de longueur 2 de* X.
4. *Pour quelles valeurs de* ε *est-ce que* 0011 *est une séquence* ε*-typique de* X *?*

Exercice 4. *Une source produit des messages sur l'alphabet* $\{a, b\}$. *On considère un message* m *produit par cette source.*

1. *Le début de* m *est ababababaabaaabbab : le coder grâce à l'algorithme de Lempel-Ziv-Welch vu en cours.*
2. *La fin du message ainsi codé est* 3b6a4a9b *: en déduire la fin de* m.