Théorie de l'information - TD4

Exercices à rendre pour le 09/12 : Exercice 2 (obligatoire) et 4 (facultatif).

Exercice 1. *On considère le canal binaire à effacement C de probabilité d'effacement λ. Notons $\alpha = p(X=0)$. Soit X la variable d'entrée et $Y = C(X)$ la variable de sortie.*

1. *Calculer $H(Y|X)$.*
2. *Exprimer $H(Y)$ en fonction de α et λ.*
3. *En déduire la capacité de C.*

Exercice 2. *On considère le canal binaire en Z de paramètre λ, défini par le diagramme suivant.*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, "1-\lambda"] \arrow[dr, "\lambda"] & 0 \\ 1 \arrow[r, "1"] & 1 \end{tikzcd}$$

Notons X la variable d'entrée et Y la variable de sortie. On note $h\colon t \mapsto -t\log_2(t) - (1-t)\log_2(1-t)$ la fonction d'entropie binaire.

1. *Donner la matrice de transmission du canal.*
2. *Calculer $H(Y|X)$.*
3. *Calculer $H(Y)$ et $I(X;Y)$.*
4. *Calculer la capacité du canal.*

Exercice 3. *Soit $n \geqslant 3$ un entier naturel. Soit $p \in [0, 1/2]$. On considère le canal C d'alphabets d'entrée et de sortie $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, et de probabilités de transition $p(x+1|x) = p(x-1|x) = p$ et $p(x|x) = 1-2p$ pour tout $x \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Calculer la capacité de ce canal.*

Exercice 4. *On considère deux canaux $C_1 = (A, S, \Pi_1)$ et $C_2 = (S, B, \Pi_2)$. Soit C le canal obtenu en concaténant les deux : la sortie de C_1 est l'entrée de C_2.*

1. *Donner la matrice de transmission de C.*
2. *Si C_1, C_2 sont des canaux binaires symétriques de paramètres λ_1, λ_2, est-ce que C est encore un canal binaire symétrique ? Et si on concaténait n canaux binaires symétriques ?*
3. *Montrer que* $\mathrm{Cap}(C) \leqslant \min(\mathrm{Cap}(C_1), \mathrm{Cap}(C_2))$.

Exercice 5. *On considère deux canaux $C_i = (A_i, B_i, \Pi_i)$, $i = 1, 2$.*

1. *Soit $C_{\prod} = (A_1 \times A_2, B_1 \times B_2, p')$ où la loi de transition p' est définie par $p'((b_1, b_2)|(a_1, a_2)) = p_1(b_1|a_1)p_2(b_2|a_2)$. Décrire la matrice de transmission et calculer le capacité de $C_{\prod}$.*
2. *Soit $C_{\coprod} = (A_1 \sqcup A_2, B_1 \sqcup B_2, p'')$ où la loi de transmission p'' est définie par $p''(b|a) = p_i(b|a)$ si $a \in A_i, b \in B_i$, et $p''(b|a) = 0$ si $a \in A_i, b \in B_{1-i}$. Décrire la matrice de transmission de $C_{\coprod}$ et montrer que sa capacité de vérifie : $2^{\mathrm{Cap} C_{\coprod}} = 2^{\mathrm{Cap} C_1} + 2^{\mathrm{Cap} C_2}$.*