

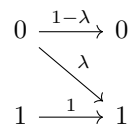
Théorie de l'information - TD4

Exercices à rendre pour le 09/12 : Exercice 2 (obligatoire) et 4 (facultatif).

Exercice 1. On considère le canal binaire à effacement C de probabilité d'effacement λ . Notons $\alpha = p(X = 0)$. Soit X la variable d'entrée et $Y = C(X)$ la variable de sortie.

1. Calculer $H(Y|X)$.
2. Exprimer $H(Y)$ en fonction de α et λ .
3. En déduire la capacité de C .

Exercice 2. On considère le canal binaire en Z de paramètre λ , défini par le diagramme suivant.



Notons X la variable d'entrée et Y la variable de sortie. On note $h: t \mapsto -t \log_2(t) - (1-t) \log_2(1-t)$ la fonction d'entropie binaire.

1. Donner la matrice de transmission du canal.
2. Calculer $H(Y|X)$.
3. Calculer $H(Y)$ et $I(X; Y)$.
4. Calculer la capacité du canal.

Exercice 3. Soit $n \geq 3$ un entier naturel. Soit $p \in [0, 1/2]$. On considère le canal C d'alphabets d'entrée et de sortie $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, et de probabilités de transition $p(x+1|x) = p(x-1|x) = p$ et $p(x|x) = 1-2p$ pour tout $x \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Calculer la capacité de ce canal.

Exercice 4. On considère deux canaux $C_1 = (A, S, \Pi_1)$ et $C_2 = (S, B, \Pi_2)$. Soit C le canal obtenu en concaténant les deux : la sortie de C_1 est l'entrée de C_2 .

1. Donner la matrice de transmission de C .
2. Si C_1, C_2 sont des canaux binaires symétriques de paramètres λ_1, λ_2 , est-ce que C est encore un canal binaire symétrique ? Et si on concaténait n canaux binaires symétriques ?
3. Montrer que $\text{Cap}(C) \leq \min(\text{Cap}(C_1), \text{Cap}(C_2))$.

Exercice 5. On considère deux canaux $C_i = (A_i, B_i, \Pi_i)$, $i = 1, 2$.

1. Soit $C_{\sqcap} = (A_1 \times A_2, B_1 \times B_2, p')$ où la loi de transition p' est définie par $p'((b_1, b_2)|(a_1, a_2)) = p_1(b_1|a_1)p_2(b_2|a_2)$. Décrire la matrice de transmission et calculer la capacité de C_{\sqcap} .
2. Soit $C_{\sqcup} = (A_1 \sqcup A_2, B_1 \sqcup B_2, p'')$ où la loi de transmission p'' est définie par $p''(b|a) = p_i(b|a)$ si $a \in A_i, b \in B_i$, et $p''(b|a) = 0$ si $a \in A_i, b \in B_{1-i}$. Décrire la matrice de transmission de C_{\sqcup} et montrer que sa capacité de vérifie : $2^{\text{Cap}C_{\sqcup}} = 2^{\text{Cap}C_1} + 2^{\text{Cap}C_2}$.