

Algèbre effective - TD1

Anneaux noethériens

Exercice 1 (Quotient et noethérianité). Soit A un anneau.

1. (1.7.2) Montrer que si A est noethérien à gauche (resp. à droite) et si I est un idéal bilatère de A , alors l'anneau quotient A/I est noethérien à gauche (resp. à droite).
2. Montrer que si $A[x]$ est noethérien à gauche (resp. à droite) alors A est noethérien à gauche (resp. à droite).

Exercice 2 (Anneau des séries formelles). Soit A un anneau noethérien à gauche (resp. à droite). Montrer que l'anneau des séries formelles $A[[x]]$ est noethérien à gauche (resp. à droite).

Exercice 3 (Lemme de Dickson). 1. Sans supposer le théorème de la base de Hilbert, montrer le lemme de Dickson: pour tout corps k et tout entier $n \geq 0$, tout idéal monomial (i.e. engendré par des monômes) de $k[x_1, \dots, x_n]$ est engendré par un nombre fini de monômes.

2. (1.7.1) Soit A un anneau noethérien à gauche, et soit E une partie non vide de A . Montrer qu'il existe une partie finie F de E telle que les idéaux à gauche $\langle E \rangle$ et $\langle F \rangle$ soient égaux.
3. Dédurre le lemme de Dickson du théorème de la base de Hilbert.
4. Dédurre le théorème de la base de Hilbert pour $k[x_1, \dots, x_n]$ du lemme de Dickson. On pourra fixer un ordre monomial et considérer l'idéal engendré par les termes dominants d'éléments de I .

Exercice 4 (Noethérien ou pas ?). Pour chacun des anneaux commutatifs suivants, dire s'il est noethérien ou pas, et le prouver.

1. L'anneau $\mathbb{Z}[(x_n)_{n \in \mathbb{N}}]$ des polynômes à coefficients entiers en un nombre infini de variables.
2. L'anneau produit $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}[x]$.
3. L'anneau des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
4. L'anneau de coordonnées $k[x, y]/(y^2 - x^3 - x)$ d'une courbe elliptique.
5. L'anneau des polynômes $f \in \mathbb{Z}[x]$ tels que pour tout $i \geq 0$, le coefficient de f devant x^i soit divisible par 2^i .
6. L'anneau $k[x^q \mid q \in \mathbb{Q}_{>0}]$ des polynômes à puissances rationnelles positives.
7. L'anneau $\bar{\mathbb{Z}}$ des entiers algébriques.

En déduire un exemple d'anneau factoriel non noethérien.

Exercice 5 (Sous-anneaux d'un anneau noethérien). 1. Soit R un anneau commutatif noethérien, et A un sous-anneau de R . Montrer que si l'inclusion $A \rightarrow R$ admet une rétraction (c'est-à-dire un morphisme $r: R \rightarrow A$ tel que $r \circ i = \text{id}_A$), alors A est noethérien.

2. Donner un exemple de sous-anneau non noethérien d'un anneau noethérien.

Exercice 6 (Radical d'un idéal). Soit A un anneau commutatif. Soit I un idéal de A . On appelle radical de I l'idéal $\sqrt{I} = \{a \in A \mid \exists n \in \mathbb{N}, a^n \in I\}$. On appelle nilradical de A et on note $\text{Nil}(A)$ le radical de l'idéal nul. On appelle radical de Jacobson de A et on note $\text{Jac}(A)$ l'intersection des idéaux maximaux de A .

1. Montrer que $\sqrt{I}$ est l'intersection de tous les idéaux premiers de A contenant I . On pourra considérer un élément x de cette intersection n'appartenant pas à I , et construire à l'aide du lemme de Zorn un idéal contenant I et aucune puissance de x pour aboutir à une contradiction.
2. Montrer que $\text{Nil}(A) \subseteq \text{Jac}(A)$.
3. Donner une condition suffisante pour que $\text{Nil}(A) = \text{Jac}(A)$; donner quelques exemples d'anneaux pour lesquels cette condition est vérifiée.

Exercice 7 (Anneaux artiniens). Un anneau commutatif A est dit artinien si toute chaîne décroissante $I_0 \supseteq I_1 \supseteq I_2 \supseteq \dots$ d'idéaux de A est stationnaire. Soit A un anneau artinien.

1. Montrer que si I est un idéal de A , alors A/I est encore artinien.
2. Montrer que A a un nombre fini d'idéaux maximaux $\mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_r$.
3. Montrer en utilisant le lemme de Zorn que dans tout anneau commutatif, un élément n'appartenant à aucun idéal maximal est une unité.
4. Montrer que le radical de Jacobson et le nilradical de A sont nilpotents.
5. En déduire qu'il existe un entier $j > 0$ tel que $\mathfrak{m}_1^j \mathfrak{m}_2^j \cdots \mathfrak{m}_r^j = 0$.
6. Montrer que tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A est maximal. On pourra considérer la chaîne d'idéaux engendrés par les puissances d'un élément de $A/\mathfrak{p}$.
7. Montrer que A est le produit d'un nombre fini d'anneaux locaux artiniens.

Exercice 8 (Théorème de Lasker–Noether). Soit A un anneau commutatif. On dit qu'un idéal I de A est primaire si pour tous $f, g \in A$:

$$fg \in I \implies (f \in I \text{ ou } \exists n > 0 : g^n \in I).$$

On dit qu'un idéal I de A est irréductible si pour tous idéaux J_1, J_2 de A tels que $I = J_1 \cap J_2$, on a $I = J_1$ ou $I = J_2$.

1. Soit $\mathfrak{q}$ un idéal primaire. Montrer que l'idéal $\mathfrak{p} = \sqrt{\mathfrak{q}}$ est premier. On dira que $\mathfrak{q}$ est $\mathfrak{p}$ -primaire.
2. Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A . Montrer qu'une intersection d'idéaux $\mathfrak{p}$ -primaires est $\mathfrak{p}$ -primaire.
3. Montrer que si A est noethérien alors tout idéal irréductible de A est primaire.
4. Montrer que si A est noethérien alors il existe un nombre fini d'idéaux premiers de A contenant I et minimaux pour l'inclusion. On pourra considérer un élément maximal de l'ensemble des idéaux pour lesquels cette proposition est fausse, et aboutir à une contradiction.
5. Montrer que si A est noethérien, alors tout idéal I de A s'écrit comme intersection finie $I = \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_r$ d'idéaux primaires. On pourra considérer un élément maximal de l'ensemble des idéaux pour lesquels cette proposition est fausse, et aboutir à une contradiction.
6. Montrer que l'on peut supposer que les idéaux premiers $\sqrt{\mathfrak{q}_i}$ sont deux à deux distincts, et que pour tout $i \in \{1 \dots r\}$,

$$\bigcap_{j \neq i} \mathfrak{q}_j \not\subseteq \mathfrak{q}_i.$$

Une telle décomposition est dite minimale.

Remarque. On peut montrer qu'il y a unicité des $\sqrt{\mathfrak{q}_i}$, et également des $\mathfrak{q}_i$ tels que $\sqrt{\mathfrak{q}_i}$ est minimal pour l'inclusion, mais pas forcément de tous les $\mathfrak{q}_i$. Par exemple, l'idéal $(x^2, xy) \subset k[x, y]$ peut se décomposer en $(x^2, y) \cap (x)$ ou $(x^2, x - y) \cap (x)$.